PEC1

Presentación

La PEC1 contiene tres ejercicios sobre filtros digitales. Dos de ellos son básicamente para realizar a mano y el tercero, más de carácter práctico, para ser resuelto mediante Matlab. En todos los casos, para la realización de cálculos y gráficas podemos utilizar Matlab. Los ejercicios servirán para consolidar conceptos de filtros digitales.

Objetivos

Ofrecer una visión general sobre las técnicas de diseño de filtros en el dominio de Fourier. Dar a conocer al estudiante las técnicas clásicas de diseño de filtros y su aplicación en el campo del procesado de la señal.

Descripción de la PEC (Práctica Evaluación Continua) a realizar

1) Sea el filtro caracterizado por la siguiente función de transferencia :

$$H(z) = \frac{(1-0.2z^{-1})(1+0.5jz^{-1})(1-0.5jz^{-1})(1+1.5z^{-1})}{(1+0.8e^{-j\frac{2\pi}{3}}z^{-1})(1+0.8e^{j\frac{2\pi}{3}}z^{-1})}$$

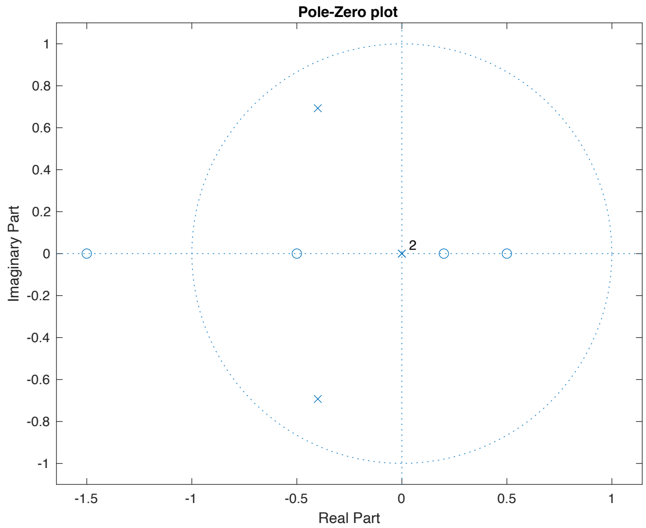
Se pide:

a) Dibujar el diagrama de polos y ceros del filtro
b) Razonar claramente si el filtro es estable.
c) Razonar claramente si el filtro es invertible
d) Si es posible, determinar su inverso. Si no es posible, determinar el sistema que compensa (invierte) su módulo.
e) Representar mediante Matlab el modulo y la fase del filtro original $H(z)$, del que habéis determinado en el apartado (c) y del conjunto de los dos filtros conectados en cascada. Comentar los resultados.

Nota: para la representación de fase, utilizar la función unwrap para evitar saltos en la fase

Solución:

a) Si dibujamos el diagrama mediante matlab, obtenemos:



b) Observamos que los polso están dentro de la circumferencia de radio 1 y por lo tanto el sistema es estable.

c) Observamos que uno de los ceros està fuera de la circumferencia de radio 1 y por lo tanto el sistema no será invertible (no es de fase mínima)

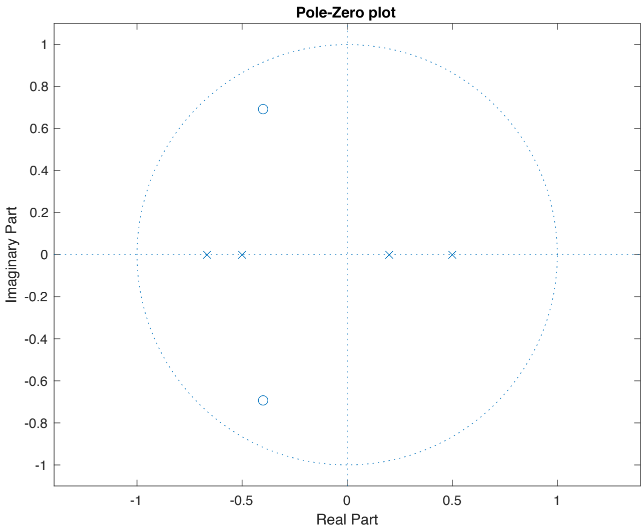
d) Dado que el sistema no es invertible, solamente podremos invertí su mòdulo. Para ello debemos convertir el filtro inicial en un filtro de fase mínima i después invertir este filtro de fase mínima. La ecuación del filtro de fase mínima H será:

$$H(z) = \frac{(1-0.2z^{-1})(1+0.5jz^{-1})(1-0.5jz^{-1})(1+\frac{1}{1.5}z^{-1})}{(1+0.8e^{-j\frac{2\pi}{3}}z^{-1})(1+0.8e^{j\frac{2\pi}{3}}z^{-1})}$$

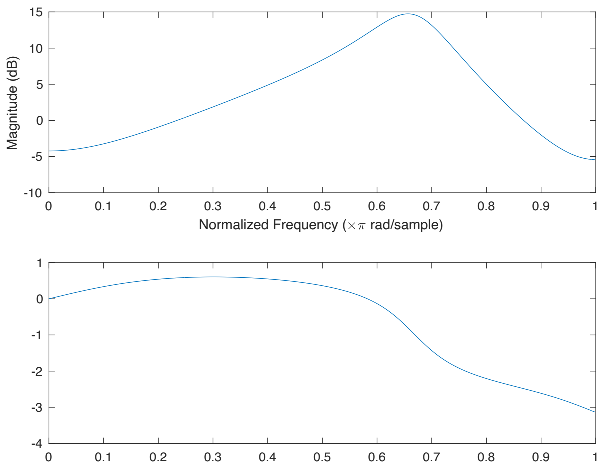
Por lo tanto, el filtro inverso a este serà:

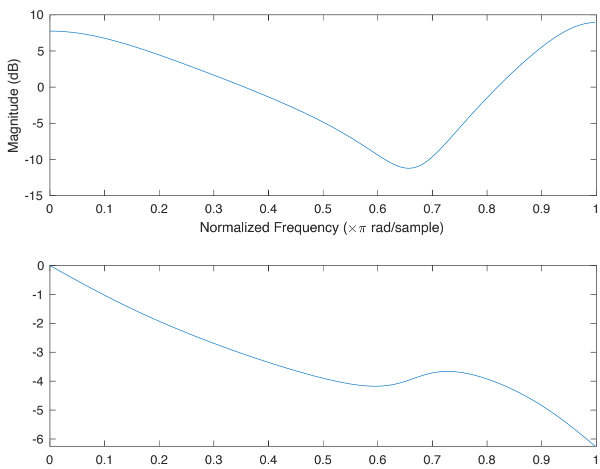
$$H2(z) = \frac{1}{1.5}\frac{(1+0.8e^{-j\frac{2\pi}{3}}z^{-1})(1+0.8e^{j\frac{2\pi}{3}}z^{-1})}{(1-0.2z^{-1})(1+0.5jz^{-1})(1-0.5jz^{-1})(1+\frac{1}{1.5}z^{-1})}$$

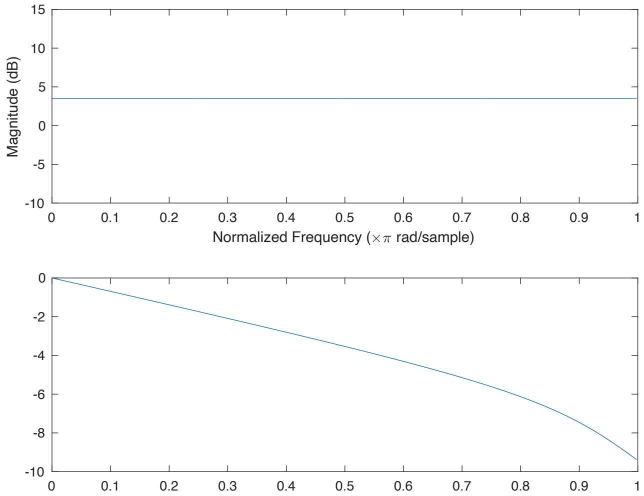
Ahora tanto los polos como los ceros están dentro de la circumferencia de radio 1:


Pole-Zero plot
Imaginary Part
Real Part

e)


Magnitude (dB)
Normalized Frequency (×π rad/sample)


Magnitude (dB)
Normalized Frequency (×π rad/sample)


Magnitude (dB)
Normalized Frequency (×π rad/sample)
15
10
5
0
-5
-10
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
-2
-4
-6
-8

2) Un modelo simple que describe la evolución de una población bacteriana es la EDF siguiente:

$$y(n) = 2y(n-1) + e(n)$$

donde $y(n)$ representa el número de bacterias en la generación n, y se supone que, sin la presencia de influencias ni impedimentos de ningún tipo, la tasa de natalidad es tal que la población se duplica cada generación. El término $e(n)$ representa cualquier incremento o decremento causado por alguna influencia externa.

a) Calcula la transformada Z de este sistema, $H(z)$, y comenta su estabilidad.

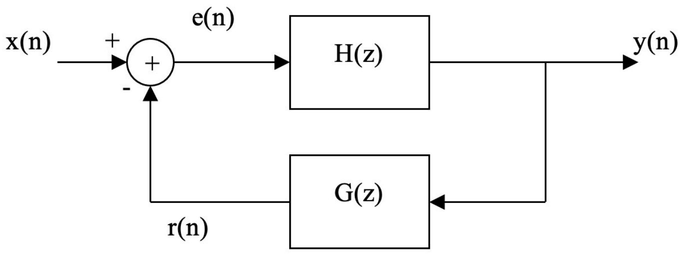
Siguiendo con el análisis de las poblaciones bacterianas, obtendremos el diagrama de bloques de un sistema simple de retroalimentación dinámica de la población. Por ello, descomponemos el término corrector e (n) en dos componentes de la siguiente forma:

$$e(n) = x(n) - r(n)$$

La señal $x(n)$ representa cualquier influencia externa que sea independiente del tamaño de la población como por ejemplo enfermedades, cambios de temperatura, radiaciones externas, etc. En cambio, el término $r(n)$ representa aquellas correcciones que dependen del tamaño de la población, como por ejemplo la disponibilidad de alimentos, la influencia de los depredadores, etc. Si definimos $r(n)$ como:

$$r(n) = 2\beta y(n-1)$$

entonces el sistema se puede representar de la siguiente manera



donde $H(z)$ es el sistema anterior (trayectoria directa) y $G(z)$ es la función de transferencia del sistema retroalimentado regulador.

b) Obtenga la expresión de la función $G(z)$
c) Calcular la función de transferencia del sistema global de lazo cerrado, $Q(z) = Y(z)/X(z)$, en términos de $H(z)$ y $G(z)$.
d) ¿Qué margen de valores debe tomar la constante reguladora β para que el sistema de lazo cerrado $Q(z)$ sea estable?
e) Si se quiere mantener constante la población de bacterias en sucesivas generaciones cuando las influencias externas independientes del tamaño de la población son cero, es decir cuando x (n) = 0, ¿qué valor deberá tener la constante reguladora β?

Solución

a) Partiendo de la ecuación $y(n) = 2y(n-1) + e(n)$ obtenemos

$$Y(z)(1-2z^{-1}) = E(z)$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{1}{(1-2z^{-1})} = \frac{z}{z-2}$$

Presenta un polo en z = 2 y por lo tanto se trata de un sistema intestable porque el módulo de este polo no está dentro de la circunferencia de radio 1.

b) Partimos de: $e(n) = x(n) - r(n)$; con $r(n) = 2\beta y(n-1)$

Y por lo tanto: $R(z) = 2\beta z^{-1} Y(z)$

Luego:

$$G(z) = \frac{R(z)}{Y(z)} = 2\beta z^{-1}$$

c) El sistema global quedará como:

$$Q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{E(z)H(z)}{E(z)+R(z)} = \frac{H(z)}{1+\frac{R(z)}{E(z)}} = \frac{H(z)}{1+G(z)H(z)}$$

d) Para calcularlo, tendremos que desarrollar la expresión anterior:

$$Q(z) = \frac{H(z)}{1+G(z)H(z)} = \frac{\frac{z}{z-2}}{1+2\beta z^{-1}\frac{z}{z-2}} = \frac{\frac{z}{z-2}}{\frac{z-2+2\beta}{z-2}} = \frac{z}{z-2+2\beta} = \frac{z}{1-\gamma z^{-1}}$$

donde hemos definido: $2\beta - 2 = 2(\beta - 1) \equiv \gamma$

El sistema será estable para $|\gamma| < 1$ y por lo tanto:

$$|\gamma| = |2(\beta - 1)|$$

Deberemos resolver la ecuación:

$$|2(\beta-1)|^2 = 1$$

Y esto es:

$$(\beta-1)^2 = \frac{1}{4}$$
$$\beta^2 - 2\beta + 1 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\beta^2 - 2\beta + \frac{3}{4} = 0$$

Que da como soluciones los valores $\beta = \frac{3}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$

Por lo tanto, el sistema $Q(z)$ será estable en el rango de valores siguientes:

$$\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{3}{2}$$

e) Si $x(n) = 0$ luego $e(n) = -r(n)$ y por lo tanto $y(n) = 2y(n-1) + e(n)$ quedará como:

$$y(n) = 2y(n-1) - r(n) = 2y(n-1) - 2\beta y(n-1) = y(n-1)(2-2\beta)$$

Si queremos que la población se mantenga constante, necesitamos $y(n) = y(n-1)$ y por ello es preciso que $2 - 2\beta = 1$

Por lo tanto, la constante reguladora será:

$$\beta = \frac{1}{2}$$

3) En este ejercicio más práctico exploraremos cómo utilizar espectrogramas para visualizar señales y cómo diseñar filtros para eliminar ruido. Por ello, partiremos de las siguientes señales disponibles: 'ManAudio.mat', 'WomanAudio.mat' y 'River.mat'.

Se pide:

a) Cargar las señales 'ManAudio' y 'WomanAudio'. Identificar la estructura de los datos y generar una variable que llamaremos 'datam' de una sola columna, para el audio del hombre y otra que llamaremos 'dataw' también de una sola columna para el audio de la mujer. 'Fs' es la frecuencia de muestreo que se recupera al cargar cualquiera de los dos archivos de audio. Reproduzca las señales 'datam' y 'dataw' con la frecuencia de muestreo que corresponde, para verificar que las señales son, efectivamente, de un hombre y de una mujer, respectivamente (utilice la función sound del Matlab).

b) Dibujar la representación temporal de los 2 primeros segundos de las frases de 'datam' y 'dataw', con el eje temporal correctamente calibrado en segundos.

c) Dibujar la representación de la FFT (módulo) de las dos frases anteriores de duración 2 segundos, con el eje frecuencial correctamente calibrado en Hz. ¿Qué diferencias se aprecian entre las dos frases a nivel frecuencial?

d) Representar el espectrograma de las frases de duración 2 segundos con la función spectrogram del Matlab. Hacer un *zoom* de las dos figuras entre 0 y 5kHz y compararlas, razonando el porqué de sus diferencias.

e) Mezclar (sumar) las señales y 'ManAudio' y 'River', con una duración de 10 segundos. ¿Qué aprecia a nivel temporal? ¿Y a nivel frecuencial?

f) A la mezcla del apartado anterior añadir un seno a una frecuencia de 10kHz.

g) Diseñar un filtro paso bajo de Butterworth (orden n=10) para eliminar el tono continuo de la señal creado en el apartado anterior. Haga una gráfica con el espectro antes y después de aplicar el filtro. Utilizar la función freqz para presentar la respuesta. Para el diseño del filtro puede utilizar *Filter Designer* que encontrará en la pestaña APPS del Matlab, o bien directamente la función buttap.

h) Repetir el apartado anterior pero ahora con un filtro de Notch (elimina-banda) y comparar los resultados. Para el diseño del filtro puede utilizar *Filter Designer* que encontrará en la pestaña APPS del Matlab, o bien directamente la función fdesign.notch.

i) Diseñar un filtro paso bajo para eliminar, en lo posible, el ruido del río en la señal creado en el apartado (f), sin alterar la señal del locutor. Para el diseño del filtro puede utilizar *Filter Designer* que encontrará en la pestaña APPS del Matlab, o bien directamente la función buttap. Escuche la señal antes y después del filtro (función sound) y representa su especto, antes y después del filtro. Comente el resultado.

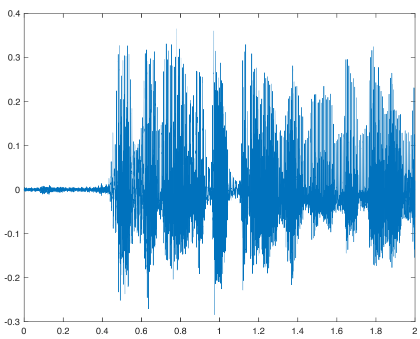
Solución

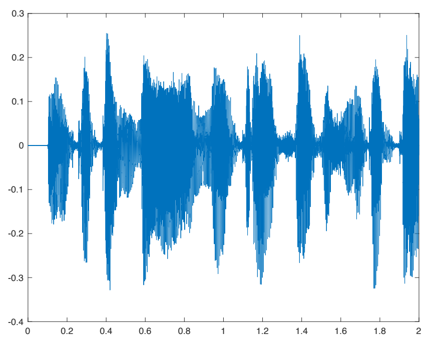
a) Cuando carrgamos los ficheros, inicialmenet tiene dos columnas porque se trata de una grabaciónn en estéreo. Tomamos, por ejemplo, la primera columna y representamos las señales:

```
load('ManAudio');
datam = data(:,1); % only one channel

load('WomanAudio');
dataw = data(:,1); % only one channel

figure('name','Temporal representation, Man');
plot(0:1/fs:length(datam)*1/fs-1/fs,datam(:,1));
figure('name','Temporal representation, Woman');
plot(0:1/fs:length(dataw)*1/fs-1/fs,dataw(:,1));
```

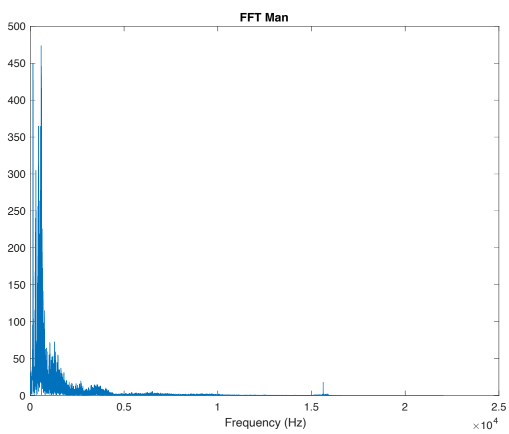
b) Si ahora mostramos solamente los primeros dos segunods, tendremos:

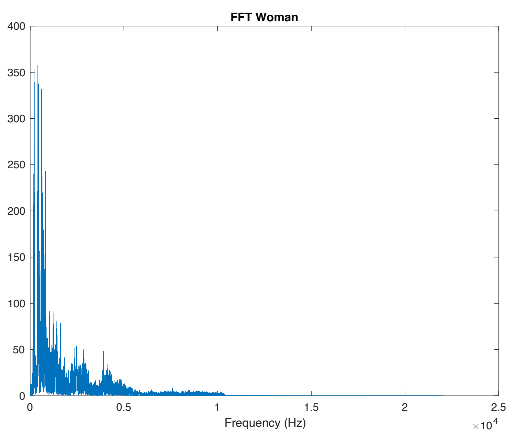
```
mostres = 2*fs; % 2 seconds of the data
figure('name','Temporal representation, Man');
plot(0:1/fs:mostres*1/fs-1/fs,datam(1:mostres,1));
figure('name','Temporal representation, Woman')
plot(0:1/fs:mostres*1/fs-1/fs,dataw(1:mostres,1));
```





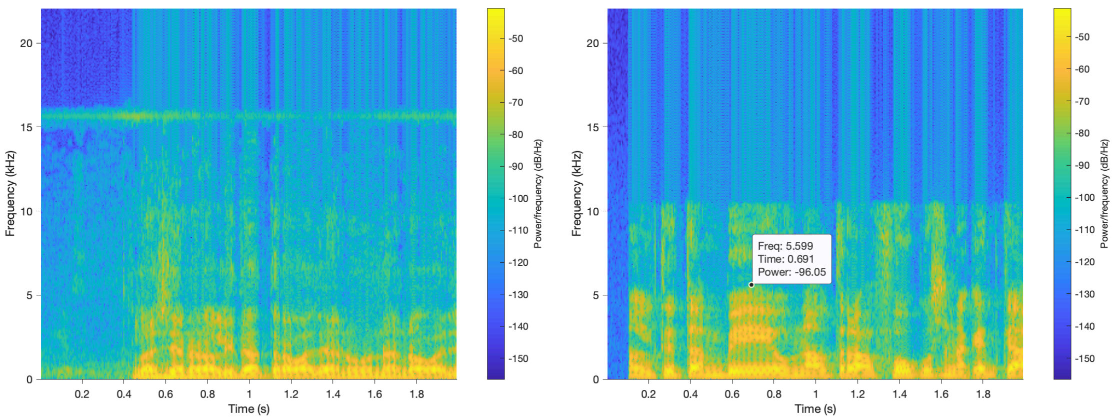
c) El espectro de las señales será:





Podemos observar que el espectro del hombre concentra energia esencialmente a frecuencias bajas, mientras que el espectro de la mujer llega a frecuencias más altea, como era esperable.

d) El espectrograma nos da lo siguiente:

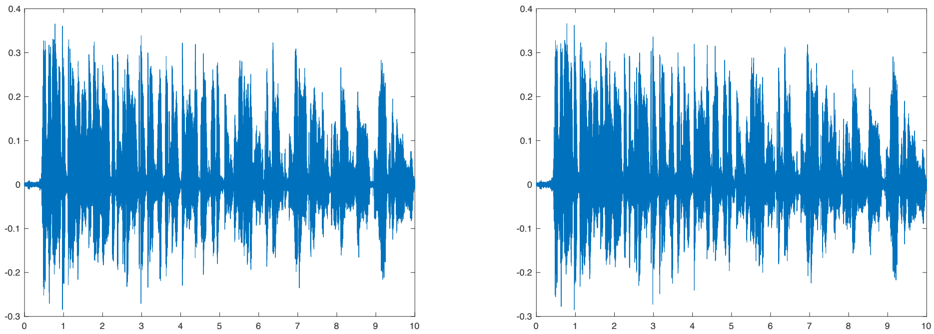


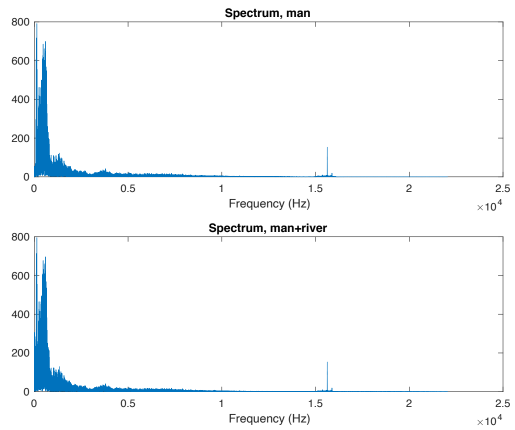
Observamos los primeros instantes de silencio en la señal del hombre, y otra vez la energía acumulada en las bajas frecuencias, en comparación con la señal de la mujer.

e) Sumando las señales, obtenemos:

```
load('ManAudio');
datam = data(:,1); % only one channel
load('WomanAudio');
dataw = data(:,1); % only one channel

mostres = 10 *fs; % 10 seconds of the data
datam = datam(1:mostres,:);
dataw = dataw(1:mostres,:);

load River
SumaSenyalSoroll = datam+data(1:length(datam));

figure('name','Temporal representation, Man');
plot(0:1/fs:mostres*1/fs-1/fs,datam(1:mostres,1));
figure('name','Temporal representation, man+river')
plot(0:1/fs:mostres*1/fs-
1/fs,SumaSenyalSoroll(1:mostres,1));

figure('name','man + river');
subplot(2,1,1);[ Senyal, f ] = ComputeFFT( datam, fs );
plot(f,abs(Senyal));xlabel('Frequency
(Hz)');title('Spectrum, man');
```

```
[ Senyal, f ] = ComputeFFT( SumaSenyalSoroll, fs );
subplot(2,1,2);plot(f,abs(Senyal));xlabel('Frequency
(Hz)');title('Spectrum, man+river')
```



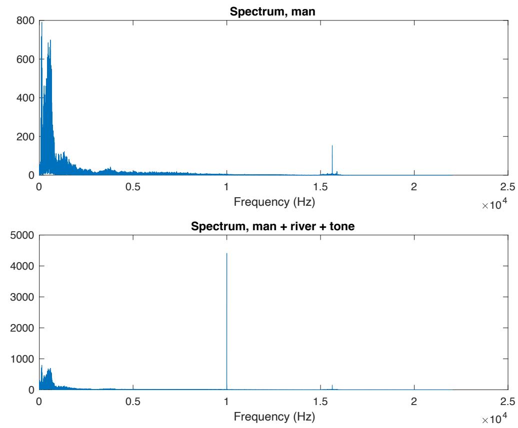


A nivel temporal se puede observar un poco como la señal river hace que haya más ruido especialmente en las transiciones entre palabras, aunque no es muy marcado. En frecuencia aún es más difícil de ver a simple vista. Sin embargo, escuchando las dos señales, se puede escuchar claramente el río de fondo en la mezcla que hemos creado.

f) Para añadir un seno de 10kHz, debemos hacer los siguiente, donde mostramos también la representación frecuencial:

```
t=0:1/fs:length(SumaSenyalSoroll)/fs-1/fs;
Sin=(1/50)*sin(2*pi*10000*t);
SumaSorollTo=SumaSenyalSoroll+Sin';

figure('name','man + river + tone');
subplot(2,1,1);[ Senyal, f ] = ComputeFFT( datam, fs );
plot(f,abs(Senyal));
xlabel('Frequency (Hz)');
title('Spectrum, man');
```

```
[ Senyal, f ] = ComputeFFT( SumaSorollTo, fs );
subplot(2,1,2);
plot(f,abs(Senyal));
xlabel('Frequency (Hz)');
title('Spectrum, man + river + tone')
```

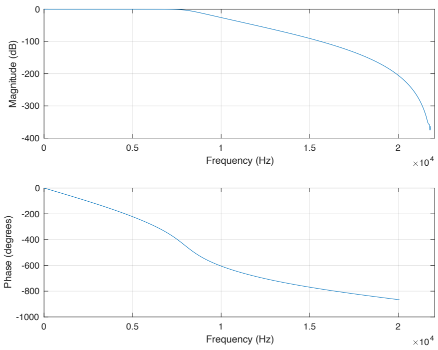


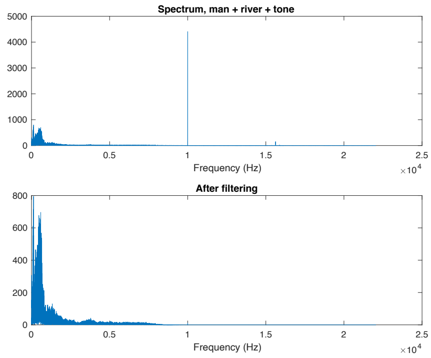
Observamos debajo el tono a 10kHz, con una amplitud mucho mayor comparada con la del espectro de la señal sin el tono.

g) Para el filtro, procedemos como sigue:

```
[b,a]=butter(10,8000/(fs/2));
SenyalFiltrat1=filtfilt(b,a,SumaSorollTo);

figure('name','Signal after Butterworth filter');
subplot(2,1,1);[ Senyal, f ] = ComputeFFT( SumaSorollTo, fs
);
plot(f,abs(Senyal));xlabel('Frequency
(Hz)');title('Spectrum, man + river + tone');
[ Senyal, f ] = ComputeFFT( SenyalFiltrat1, fs );
subplot(2,1,2);plot(f,abs(Senyal));xlabel('Frequency
(Hz)');title('After filtering')
```

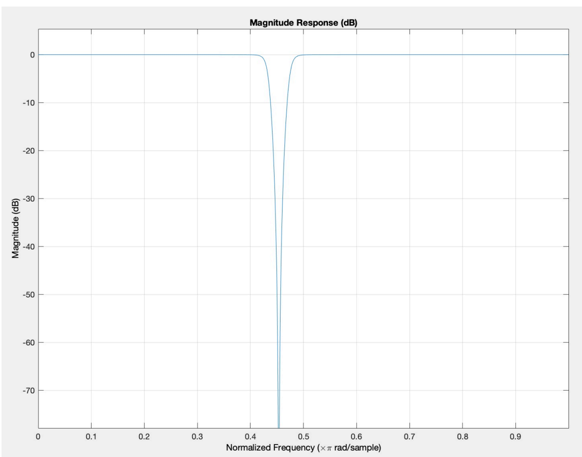
y observamos la respuesta del filtro y cómo después del filtraje, el tono ha desaparecido:

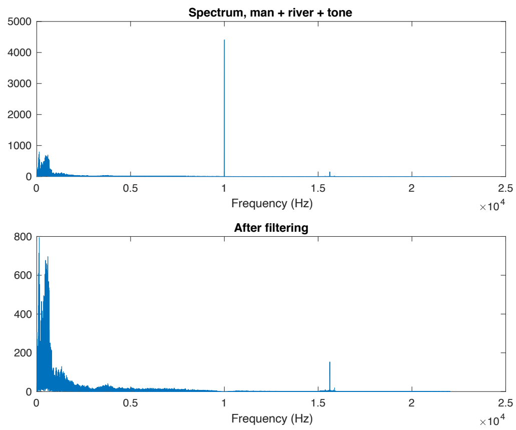




h) Si utilizamos un filtro de Notch, tendremos:

```
d = fdesign.notch(6,10000,10,fs);
Hd = design(d);
SenyalFiltrat2=filter(Hd,SumaSorollTo);

figure('name','Signal after Notch filter');
subplot(2,1,1);[ Senyal, f ] = ComputeFFT( SumaSorollTo, fs );
plot(f,abs(Senyal));xlabel('Frequency  (Hz)');title('Spectrum,
man + river + tone');
[ Senyal, f ] = ComputeFFT( SenyalFiltrat2, fs );
subplot(2,1,2);plot(f,abs(Senyal));xlabel('Frequency
(Hz)');title('After filtering')

freqz(Hd)
```

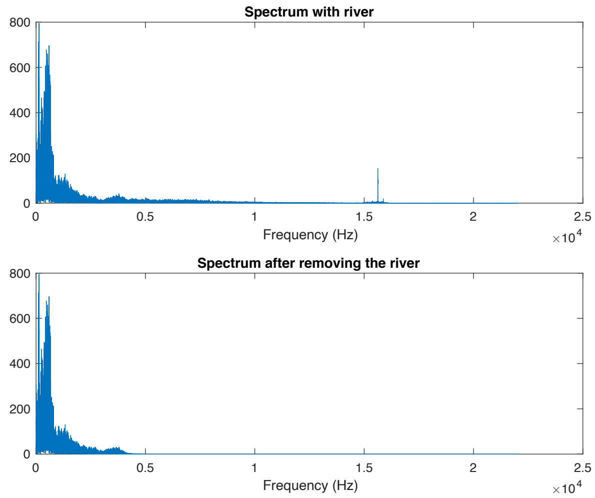




Donde ahora la respuesta del filtro es claramente diferente a la anterior ya que se trata de un filtro elimina banda

i) Finalmente, para intentar eliminar el efecto molesto del río, y dado que espectralmente se superpone con la señal de voz, sólo podremos aplicar un filtro paso bajo que elimine las frecuencias más allá de los 4kHz a partir de las cuales podemos considerar que ya no hay señal de voz útil.

```
[b,a]=butter(10,4000/(fs/2));
SenyalFiltrat2=filtfilt(b,a,SumaSenyalSoroll);

figure('name','man with filtered tone');
subplot(2,1,1);[ Senyal, f ] = ComputeFFT( SumaSenyalSoroll,
fs );
plot(f,abs(Senyal));xlabel('Frequency (Hz)');
title('Spectrum with river');
[ Senyal, f ] = ComputeFFT( SenyalFiltrat2, fs );
subplot(2,1,2);plot(f,abs(Senyal));xlabel('Frequency (Hz)');
title('Spectrum after removing the river')
```



Observamos que el filtro paso bajo nos "corta" el espectro de la señal de voz a 4 KHz, eliminando el resto de frecuencias y por lo tanto también la contribución de la señal del río en esta parte. No podemos, sin embargo, eliminar completamente la señal del río en la parte de espectro en la que se superponen las dos señales.