Ejercicios Propuestos (para solucionar)

1) Sea el sistema descrito por el EDF :

$$y[n] - Ky[n-1] = x[n] \qquad ; \; n \geq 0$$

Determinar el margen de valores de K para que la respuesta impulsional del sistema sea estable.

2) Supongamos el sistema definido por la siguiente EDF

$$y[n] = Ky[n-1] + x[n] \text{ con condición inicial } y[-1] = 0,$$

y entrada $y[n] = x[n]$.

Analizar la respuesta utilizando la transformada z.

3) Dado el sistema digital con la siguiente transformada Z:

$$H(z) = \frac{A}{(1 - pz^{-1})^2}$$

Se pide:

a) Dibuje el diagrama de polos y ceros en el plano Z suponiendo que el sistema sea causal y estable. ¿Qué diagramas son posibles en función de los posibles valores de p?
b) Determinar la ecuación en diferencias finitas (EDF) que describe completamente este sistema. ¿De qué orden es la EDF obtenida?
c) Dibuje un diagrama de implementación del sistema que utilice el menor número posible de bloques retardadores o memoria. ¿Qué relación hay entre la memoria del sistema y el orden de la EDF?

4) Sea un filtro con las siguientes características:

- Parámetro de ganancia $G = 3$
- Ceros en: $z_1 = e^{-j\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{j\frac{\pi}{3}}$, $z_3 = e^{-j2\pi}$

Se pide:

a) Determine cuál será su función de transferencia
b) Dibuje su diagrama de polos y ceros
c) Determine cuál será su respuesta impulsional
d) Razone claramente si el filtro es causal o no
e) Razone claramente si el filtro es estable o no
f) Indicar cuál será su ROC
g) Obtener, mediante el Matlab, la representación del módulo de su respuesta frecuencial

5) Sea un filtro con las siguientes características:

- Parámetro de ganancia $G = 3$
- Polos en: $p_1 = 0.8\, e^{-j\frac{3\pi}{4}}$, $p_2 = 0.8\, e^{j\frac{3\pi}{4}}$
- Ceros en: $z_1 = e^{j\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = 0$

a) Determine cuál será su función de transferencia
b) Dibuje su diagrama de polos y ceros
c) Determine cuál será su respuesta impulsional
d) Razone claramente si el filtro es causal o no
e) Razone claramente si el filtro es estable o no
f) Indicar cuál será su ROC
g) Obtener, mediante el Matlab, la representación del módulo de su respuesta frecuencial

6) Queremos diseñar un filtro causal que, si la entrada proviene de muestrear una señal de audio a 8.000 Hz, tenga las siguientes especificaciones :

- Elimine el componente continua y también la frecuencia analógica de 2.000 Hz
- Tenga un pico de máxima ganancia a la frecuencia analógica de 3.000 Hz

Se pide:

a) Proponer un diagrama de polos y ceros que permita implementar el filtro
b) Determinar la función de transferencia en función de una ganancia global y la posición de los polos y los ceros.
c) Representar el diagrama de polos y ceros
d) Si queremos que el valor del pico (en módulo) sea 10, determinar la constante de ganancia del filtro (ajustar el valor a partir de la representación del módulo en Matlab)

7) Sea la siguiente secuencia, que es la respuesta impulsional de un filtro causal (el primer valor corresponde a $n = 0$):

$$h[n] = \{1, 1.2, -1.2, 1.4, 1.6, 1.4, -1.2, 1.2, 1\}$$

Se pide:

a) Explique qué tipo de simetría presenta el filtro
b) Indicar cómo será su fase
c) Determine la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$
d) Determine cuál será su retardo de grupo

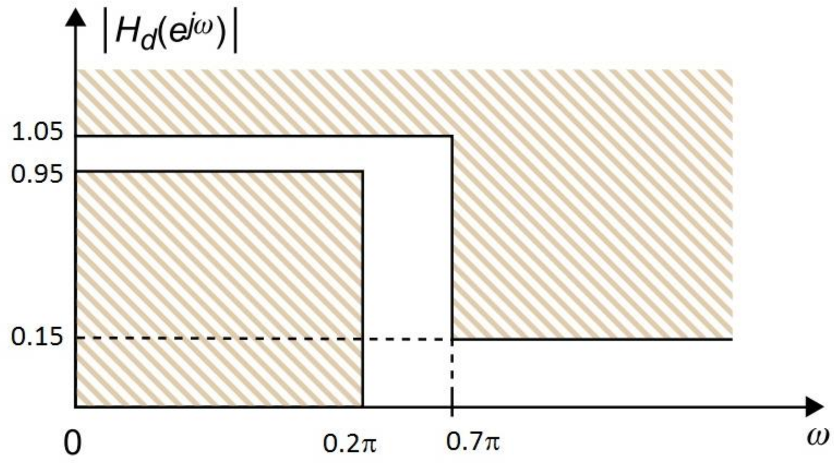
8) Sea el siguiente filtro:

$$H(z) = \frac{(1-0.2z^{-1})(1+0.5jz^{-1})(1-0.5jz^{-1})(1+1.5z^{-1})}{(1+0.8e^{-j\frac{2\pi}{3}}z^{-1})(1+0.8e^{j\frac{2\pi}{3}}z^{-1})}$$

Se pide:

a) Razonar claramente si el filtre es invertible o no
b) Si es posible, determinar su inverso. Si no es posible, determinar el sistema que compensa (invierte) su módulo.
c) Representar en Matlab el módulo y la fase del filtre original, del que has determinado y del conjunto de los dos.

9) Sea la siguiente plantilla:



Utilizar la función de Octave/Matlab `fir1.m` para conseguir la respuesta impulsional de un filtro que la cumpla.

Comparar el resultado obtenido con diferentes ventanas, indicando para cada caso el orden mínimo necesario para cumplir la plantilla.

10) Sea el sistema descrito por la EDF:

$$y[n] - a^2 y[n-2] = x[n] \qquad ; \; n \geq 0$$

a) Indica si es causal o anticausal, y porqué.
b) Indica el valor de todos los polos y ceros del sistema, y represéntalos en un diagrama polos-ceros
c) Razona si para $a = 2$ el sistema es estable o inestable.

11) Sobre el método de las ventanas para el diseño de filtros, responde razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Qué tipo de filtros permite diseñar (FIR o IIR).
b) Cuáles son los pasos principales del diseño.
c) Cómo afecta el tipo de ventana a la banda de transición del filtro.

Ejercicios Resueltos

1) Utilizar un filtro básico de forma repetida permite hacer más selectiva la respuesta en frecuencia. Una forma de realizarlo es a base de conectar el mismo filtro en cascada con él mismo dos o más veces. En este ejercicio analizaremos una estructura básica de filtro y cómo obtener filtros más selectivos a partir de esta conexión en cascada.

Sea, pues, el sistema digital con el diagrama polos- ceros de la figura 1. Se pide :

a) Calcular su función de transferencia y su respuesta al impulso.
b) Representar la respuesta al impulso y comentar de qué tipo de respuesta se trata.
c) Discutir con razonamientos claros la causalidad y la estabilidad del sistema.
d) Dibujar una implementación del sistema y comentar si es directa o recursiva.
e) Calcular la transformada de Fourier del sistema anterior.
f) Representar el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia en el intervalo [$-\pi$,π]. ¿Qué tipo de filtrado realiza el filtro?
g) ¿Qué característica presenta la fase del filtro? Calcular el retardo de grupo del filtro y la frecuencia de corte (a 3dB) de la banda de paso.

Si ahora se conectan en cascada 4 etapas como la anterior para sintetizar un filtro de orden más elevado, se pide :

h) Calcular y representar la respuesta en frecuencia (módulo y fase) de la conexión en cascada
i) ¿Qué cambios experimenta el módulo de la respuesta en frecuencia?
j) ¿Qué cambios experimenta la fase del filtro?
k) ¿Cuánto vale el retardo de la conexión en cascada de las 4 etapas ? Es lógico este valor para el retardo? Relacione el valor del retardo de grupo con la forma de la respuesta al impulso.

Utilizando el circuito digital anterior (4 etapas del sistema inicial conectadas en cascada):

l) Diseñe un filtro paso bajo con una frecuencia de corte de 1 kHz , sabiendo que el convertidor A/D utilizado trabaja a una frecuencia de muestreo de 10 kHz. Cuántas etapas conectadas en cascada se requerirán?

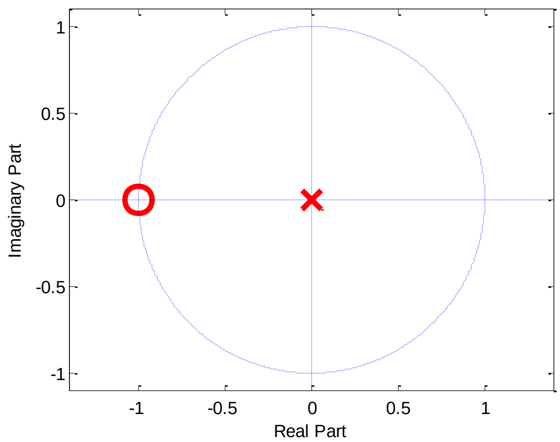


Figura 1: Diagrama polos-ceros de la celda básica

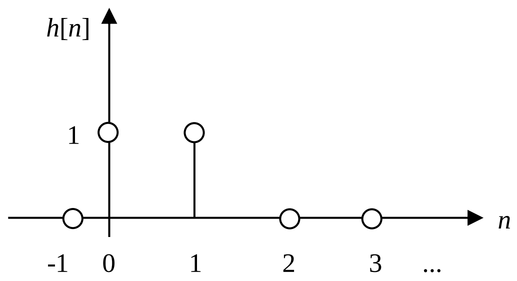
Solución

a) Calcular su función de transferencia y su respuesta al impulso.

$$H(z) = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z}$$

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

b) Representar la respuesta al impulso y comentar de qué tipo de respuesta se trata.



c) Discutir con razonamientos claros la causalidad y la estabilidad del sistema.

El sistema es causal, tal y com se puede comprobar en la forma de la respuesta impulsional, ya que ésta es nula para valores de $n < 0$

El sistema es de respuesta impulsional finita (FIR) y por lo tant es estable siempre.

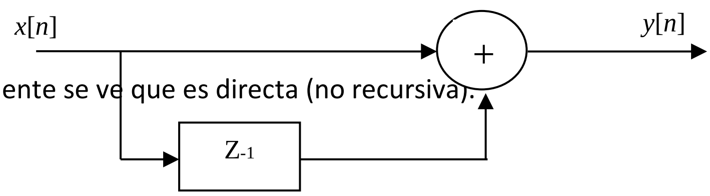
d) Dibujar una implementación del sistema y comentar si es directa o recursiva.

$$H(z) = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Por lo tanta, la EDF será:

$$Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

y la implementación la haremos como:

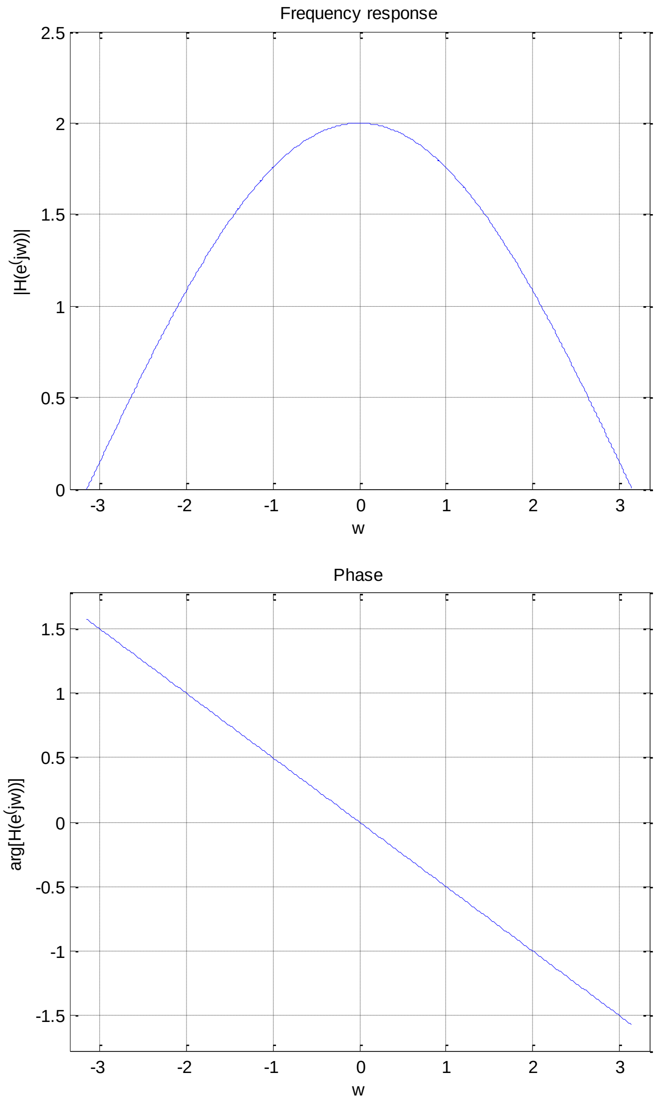


Claramente se ve que es directa (no recursiva).

d) Calcular la transformada de Fourier del sistema anterior.

$$H(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} = e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right) = 2e^{-j\frac{\omega}{2}}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

e) Representar el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia en el intervalo [-π,π]. ¿Qué tipo de filtrado realiza el filtro?



Se trata de un filtro paso bajo.

g) ¿Qué característica presenta la fase del filtro? Calcular el retardo de grupo del filtro y la frecuencia de corte (a 3dB) de la banda de paso.

De la ecuación del apartado (e) deducimos que la fase del filtro es:

$$Arg\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{\omega}{2}$$

Por lo tanto, se trata de un filtro con fase lineal. El retardo de grupo lo obtendremos a partir de la derivada como:

$$\tau_g = -\frac{\partial Arg\{H(e^{j\omega})\}}{\partial \omega} = \frac{1}{2}$$

Y da una constante, tal y como debe ser para los casos de fase lineal.

La frecuencia de corte a 3dB la obtenemos como la frecuencia a la cual la amplitud ha caido en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ respecto de su valor máximo:

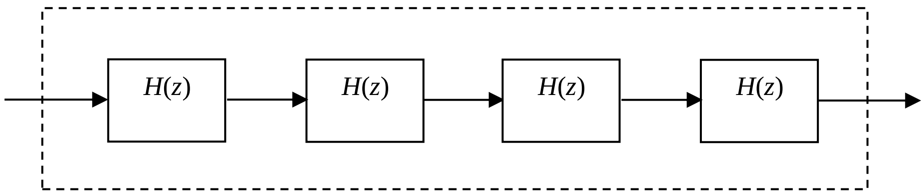
$$|H(e^{j\omega_c})| = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto:

$$\omega_c = 2 \cdot arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Si ahora se conectan en cascada 4 etapas como la anterior para sintetizar un filtro de orden más elevado, se pide:

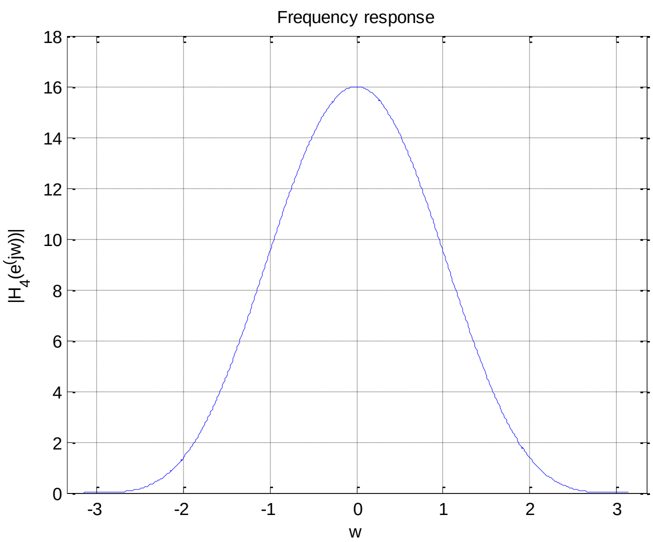
h) Calcular y representar la respuesta en frecuencia (módulo y fase) de la conexión en cascada

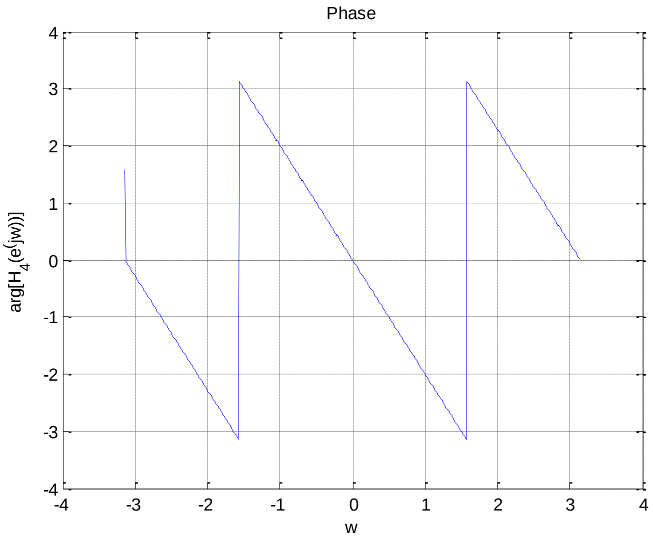


La respuesta global de encadenar cuatro sistemas en cascada vendrá dada por la multiplicación de la respuesta de cada celda. Por lo tanto:

$$H_4(z) = (1 + z^{-1})^4$$

$$H_4(e^{j\omega}) = (1 + e^{-j\omega})^4 = e^{-j4\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)^4 = 2^4 e^{-j4\frac{\omega}{2}} \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)$$





i) ¿Qué cambios experimenta el módulo de la respuesta en frecuencia?

Ahora tenemos un filtro de orden 4 y por lo tanto es mucho más selectivo en frecuencia.

Fijémonos que la nueva frecuencia de corte será:

$$|H_4(e^{j\omega_c})| = \frac{16}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow 16 \cdot \cos^4\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \frac{16}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_c = 2 \cdot arccos\left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right) = 0.8206\ rad$$

que es prácticamente la mitad de la que teníamos antes.

j) ¿Qué cambios experimenta la fase del filtro?

La fase continua siendo lineal pero tiene una pendient cuatro veces más fuerte.

k) ¿Cuánto vale el retardo de la conexión en cascada de las 4 etapas? Es lógico este valor para el retardo? Relacione el valor del retardo de grupo con la forma de la respuesta al impulso.

Tal y como hemos visto, la fase presenta una pendiente cuatro veces más fuerte, por lo tanto el retardo de grupo será cuatro veces más grande que antes, y ahora tendremos:

$$\tau_g = -\frac{\partial Arg\{H_4(e^{j\omega})\}}{\partial\omega} = \ 2$$

Si calculamos la respuesta impulsional, obtendremos (podemos utilizar el triángulo de Tartaglia para encontrar los coeficientes del binomio):

$$H_4(z) = (1 + z^{-1})^4 = 1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4}$$

y por lo tanto:

$$h[n] = \delta[n] + 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 4\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

El retardo de grupo vale exactamente $\frac{(L-1)}{2}$, donde L es la longitud de $h[n]$.

Utilizando el circuito digital anterior (4 etapas del sistema inicial conectadas en cascada):

l) diseñe un filtro paso bajo con una frecuencia de corte de 1 kHz , sabiendo que el convertidor A/D utilizado trabaja a una frecuencia de muestreo de 10 kHz. Cuántas etapas conectadas en cascada se requerirán?

Según lo que hemos visto en el apartado (i), la frecuencia de corte viene dada por:

$$\omega_c = 2 \cdot arccos\left(2^{-\frac{1}{2M}}\right)$$

donde M es el número de celdas elementales conectadas en cascada.
Ahora nos dicen que queremos una frecuencia de corte de 1kHz, con un sistema que tiene una frecuencia de muestreo de $F_s = 10kHz$. Por lo tanto, la frecuencia de corte digital vendrá dada por $f_c = \frac{1kHz}{10kHz} = 0.1$ y por lo tanto $\omega_c = 2 \cdot \pi \cdot 0.1 = \frac{\pi}{5}$

A partir de aquí, obtendremos el número de celdas necesarias como:

$$log\left[\cos^{M}\left(\frac{\omega_c}{2}\right)\right] = log\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$M = \frac{log\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{log\left[\cos\left(\frac{\omega_c}{2}\right)\right]} = \frac{\frac{-1}{2}log[2]}{log\left[\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]} = 6.9$$

Por lo tanto vamos a necesitar 7 celdas para cumplir las especificaciones del filtro que nos piden.

2) Sea un filtro con las siguientes características:

Parámetro de ganancia $G = 0.5$

Polos en: $p_1 = 0.5\, e^{-j\frac{3\pi}{4}},\ p_2 = 0.5\, e^{j\frac{3\pi}{4}}$

Ceros en: $z_1 = 0.5\, e^{j\frac{\pi}{5}}$, $z_2 = 0.5\, e^{-j\frac{\pi}{5}}$, $z_3 = 0.8$

Se pide:

a) Determine cuál será su función de transferencia.
b) Dibuje su diagrama de polos y ceros.
c) Determine cuál será su respuesta impulsional.
d) Razone claramente si el filtro es causal o no.
e) Razone claramente si el filtro es estable o no.
f) Indicar cuál será su ROC.
g) Obtener, mediante el Matlab, la representación del módulo de su respuesta frecuencial.

Solución

a) Determine cuál será su función de transferencia.

Según el enunciado, y teniendo en cuenta que nos interesa tener un sistema causal, la $H(z)$ la determinaremos a partir de la expresión:

$$H(z) = 0.5\, \frac{\left(1 - 0.5\, e^{j\frac{\pi}{5}}\, z^{-1}\right)\left(1 - 0.5\, e^{-j\frac{\pi}{5}}\, z^{-1}\right)(1 - 0.8z^{-1})}{\left(1 - 0.5\, e^{j\frac{3\pi}{4}}\, z^{-1}\right)\left(1 - 0.5\, e^{-j\frac{3\pi}{4}}\, z^{-1}\right)} = \cdots$$

$$= 0.5\, \frac{1 - \left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 0.8\right] z^{-1} + \left[0.8\, cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 0.25\right] z^{-2} - 0.2\, z^{-3}}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) z^{-1} + 0.25\, z^{-2}}$$

Si trabajamos con una expresión del tipo

$$H(z) = 0.5\, \frac{\left(z - 0.5\, e^{j\frac{\pi}{5}}\right)\left(z - 0.5\, e^{-j\frac{\pi}{5}}\right)(z - 0.8)}{\left(z - 0.5\, e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z - 0.5\, e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right)}$$

la función de transferencia tiene el numerador de orden mayor que el denominador y por lo tanto el sistema no sería causal. En adelante continuaremos con la primera opción.

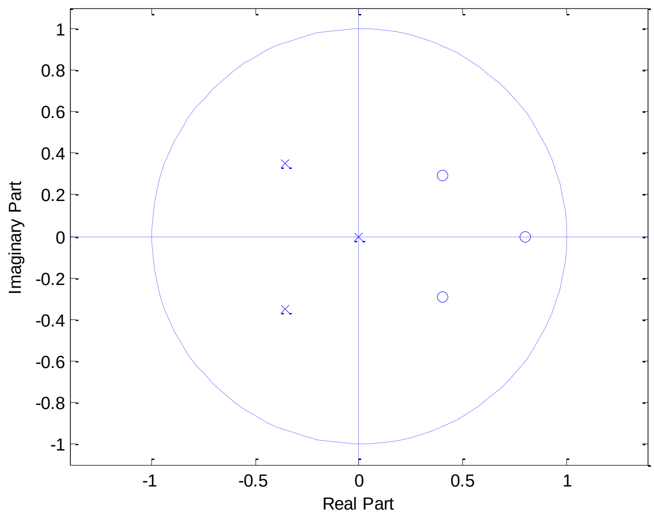
b) Dibuje su diagrama de polos y ceros.

Se puede dibujar a mano, situando directamente los polos y los ceros del enunciado en el plano Z, o bien lo podemos hacer mediante el matlab.

Código Matlab:

```
G = 0.5;
polos = [0.5*exp(-j*3*pi/4); 0.5*exp(j*3*pi/4)];
ceros = [0.5*exp(-j*pi/5); 0.5*exp(j*pi/5); 0.8];
[B, A] = zp2tf(ceros, polos, G);
[H,w] = freqz(B,A);
figure
zplane(B,A)
```

La figura resultante se presenta a continuación.



c) Determine cuál será su respuesta impulsional.

Formalmente, aplicando la descomposición en fracciones simples se podría obtener una expresión cerrada para $h[n]$. Evidentemente, si alguien lo ha hecho así la respuesta es correcta. Aquí presentaremos una alternativa para obtener valores de la respuesta impulsional, que en algunos casos nos puede servir para ver la forma que tiene sin necesidad de buscar la expresión explícita.

A partir de la $H(z)$ podemos encontrar la EDF y aplicando una delta a la entrada, obtener la $h[n]$

$$H(z) = 0.5\,\frac{\left(1-0.5\,e^{j\frac{\pi}{5}}\,z^{-1}\right)\left(1-0.5\,e^{-j\frac{\pi}{5}}\,z^{-1}\right)(1-0.8z^{-1})}{\left(1-0.5\,e^{j\frac{3\pi}{4}}\,z^{-1}\right)\left(1-0.5\,e^{-j\frac{3\pi}{4}}\,z^{-1}\right)} =$$

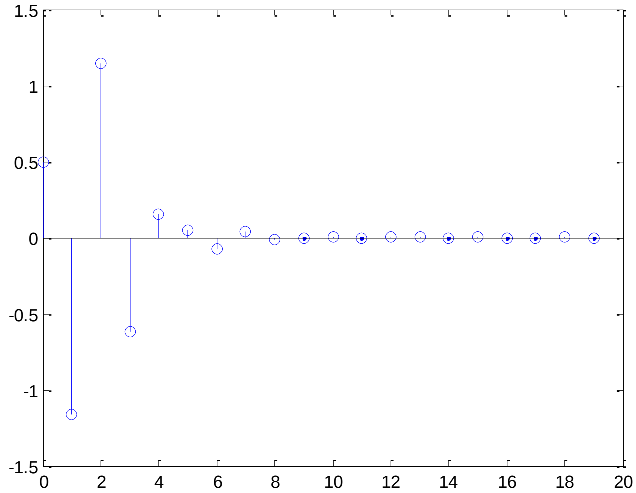
$$= \frac{0.5-0.8045\,z^{-1}+0.4486z^{-2}-0.1z^{-3}}{1+0.7071z^{-1}+0.25z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$y[n] = 0.5\,x[n] - 0.8045\,x[n-1] + 0.4486\,x[n-2] - 0.1\,x[n-3] \\ - 0.7071\,y[n-1] - 0.25\,y[n-2]$$

La $h[n]$ será la salida $y[n]$ cuando la entrada es $x[n] = \delta[n]$:

$$h[n] = 0.5\ \delta[n] - 0.8045\ \delta[n-1] + 0.4486\ \delta[n-2] - 0.1\ \delta[n-3] - 0.7071\ h[n-1] - 0.25\ h[n-2]$$

Dando valores a *n* y considerando condiciones iniciales nulas, las 20 primeras muestras serán:



d) Razone claramente si el filtro es causal o no.

Tal y como hemos construido nuestra $H(z)$, con polos y ceros de la forma $(1 - az^{-1})$, estamos forzando ya que el sistema sea causal, y esto lo podemos comprobar con la forma de la EDF y de la respuesta impulsional obtenida en el apartado anterior.

e) Razone claramente si el filtro es estable o no.

Según la situación de los polos que nos da el enunciado, y teniendo en cuenta que nos ha aparecido un polo implícito en $z = 0$, podemos observar que el sistema es estable ya que todos los polos están dentro de la circunferencia de radio $r = 1$.

Esta estabilidad se observa también en la forma de la respuesta impulsional.

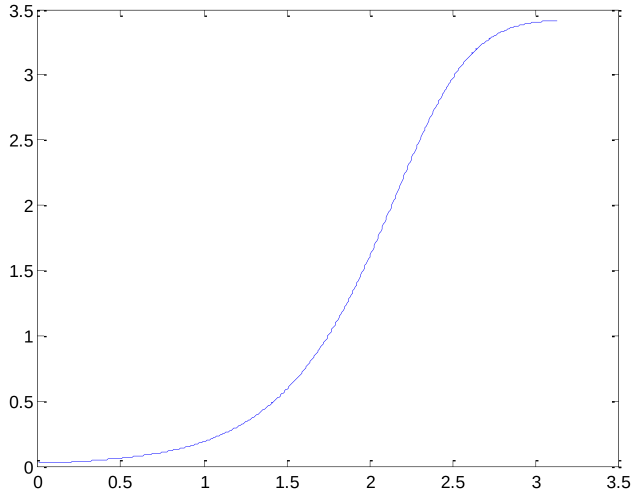
f) Indica cuál será su ROC.

La ROC vendrá dada por el exterior del círculo del polo de radio mayor: $|z| > 0.5$

g) Obtener, mediante el Matlab, la representación del módulo de su respuesta frecuencial.

Código matlab:
```
G = 0.5;
polos = [0.5*exp(-j*3*pi/4); 0.5*exp(j*3*pi/4)];
ceros = [0.5*exp(-j*pi/5); 0.5*exp(j*pi/5); 0.8];
[B, A] = zp2tf(ceros, polos, G);
[H,w] = freqz(B,A);
figure
plot(w,abs(H))
```

La figura resultante se muestra a continuación.


3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

3) Considere la respuesta al impulso del filtro FIR, definida gráficamente en la figura 1, y responde a les preguntas siguientes:

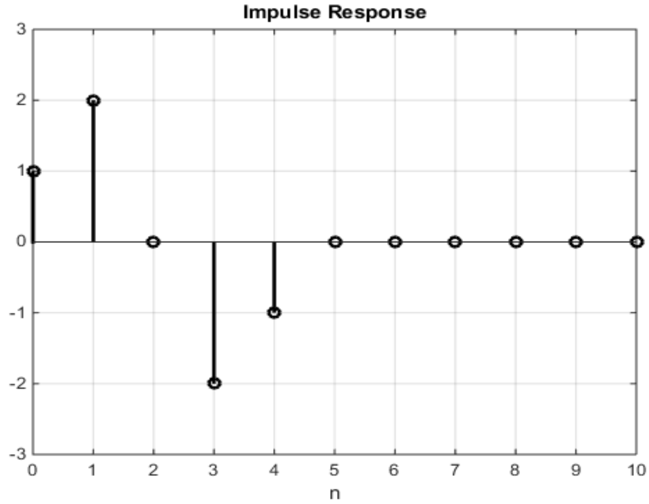


Figura 1: Respuesta al impulso del filtro FIR

a) Calcule la función de transferencia H(z) y proporcione la ecuación en diferencias que relaciona la entrada y la salida del filtro.
b) ¿Qué simetría presenta este filtro? Descríbela matemáticamente.
c) Representa el diagrama de polos y ceros de H(z).
d) Calcule la transformada de Fourier del sistema anterior y preséntala en términos del su módulo y fase.
e) Calcule el retardo de grupo del filtro.
f) Represente, utilizando Matlab, el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia en el intervalo $[0,\pi]$. ¿Qué tipo de filtrado realiza el filtro? ¿Qué característica presenta la fase del filtro?
g) ¿Es invertible el filtro? Justifica la respuesta.

Solución

Considere la respuesta al impulso del filtro FIR, definida gráficamente en la figura 1, y responde a les preguntas siguientes:

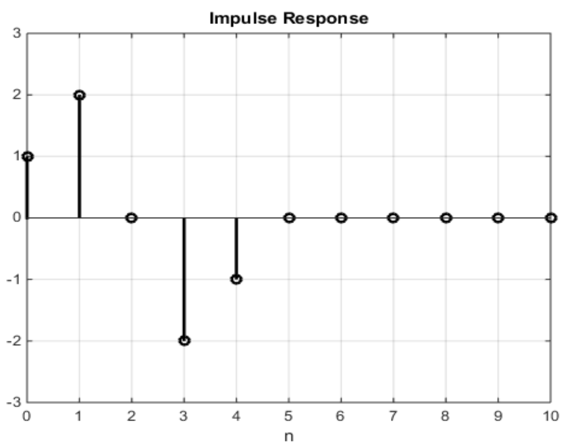


Figura 1: Respuesta al impulso del filtro FIR

a) Calcule la función de transferencia H(z) y proporcione la ecuación en diferencias que relaciona la entrada y la salida del filtro.

De la gráfica se obtiene:

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} - 2z^{-3} - z^{-4}$$

Dado que:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + 2z^{-1} - 2z^{-3} - z^{-4}$$

Tenemos:

$$Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) - 2z^{-3}X(z) - z^{-4}X(z)$$

Aplicando la transformada Z inversa a banda y banda obtendremos la ecuación en diferencias:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) - 2x(n-3) - x(n-4)$$

b) ¿Qué simetría presenta este filtro? Descríbela matemáticamente.

Presenta simetría impar respecto a la muestra central. Eso es:

$$h(n) = -h(4-n)$$

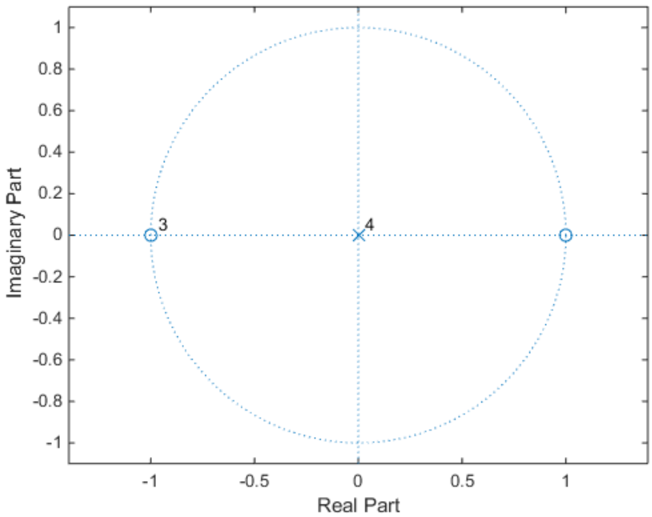
$$\begin{aligned} n = 0; &\quad h(0) = -h(4) = 1 \\ n = 1; &\quad h(1) = -h(3) = 2 \\ n = 2; &\quad h(2) = -h(2) = 0 \end{aligned}$$

c) Representa el diagrama de polos y ceros de H(z).

Tenemos:

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} - 2z^{-3} - z^{-4} = \frac{z^4 + 2z^3 - 2z - 1}{z^4}$$

Los cuatro polos están en z=0.
Los ceros en: roots([1 2 0 -2 -1])= -1,-1,-1,1



d) Calcule la transformada de Fourier del sistema anterior y preséntala en términos del su módulo y fase.

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = 1 + 2e^{-j\omega} - 2e^{-j3\omega} - e^{-j4\omega}$$
$$= e^{-j2\omega}\left(e^{j2\omega} + 2e^{j\omega} - 2e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}\right)$$
$$= e^{-j2\omega}\left(e^{j2\omega} - e^{-j2\omega} + 2e^{j\omega} - 2e^{-j\omega}\right)$$

$$e^{j2\omega} - e^{-j2\omega} = 2jsin(2\omega)$$
$$e^{j\omega} - e^{-j\omega} = 2jsin(\omega)$$

$$H(e^{j\omega}) = 2je^{-j2\omega}[sin(2\omega) + 2sin(\omega)] = 2[sin(2\omega) + 2sin(\omega)]e^{-j2\omega + j\frac{\pi}{2}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = 2[sin(2\omega) + 2sin(\omega)]$$
$$H(e^{j\omega}) = -2\omega + \frac{\pi}{2}$$

e) Calcule el retardo de grupo del filtro.

El retardo de grupo se obtendrá a partir de:

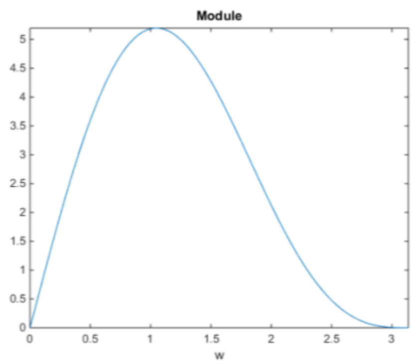
$$\tau_g = -\frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial \omega} = 2$$

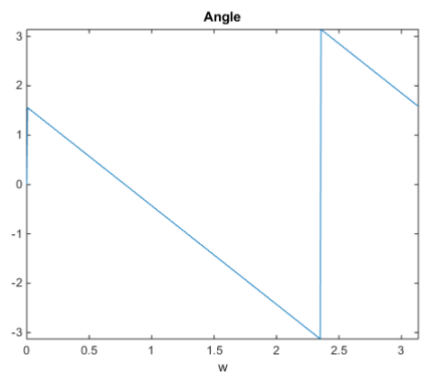
donde:

$$H(e^{j\omega}) = -2\omega + \frac{\pi}{2}$$

f) Represente, utilizando Matlab, el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia en el intervalo $[0,\pi]$. ¿Qué tipo de filtrado realiza el filtro? ¿Qué característica presenta la fase del filtro?

De la expresión obtenida en el apartado d podemos representar directamente el módulo y la fase.





El filtrado es de tipo pasa-banda y la fase es lineal.

Podemos comprobar el resultado:

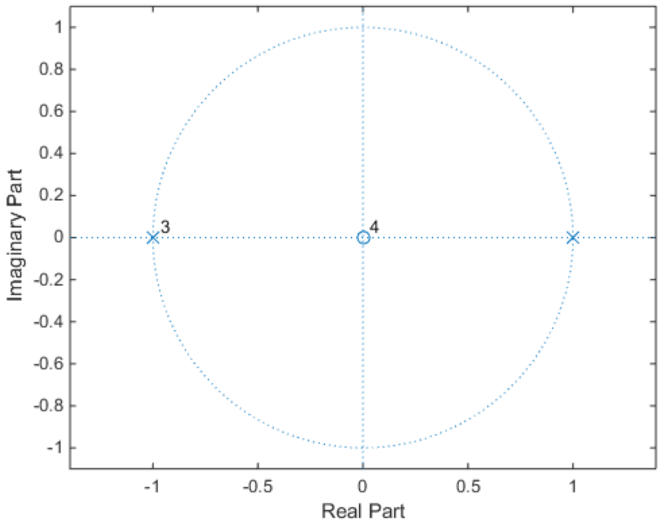
```
[H,w] = freqz([1 2 0 -2 -1],1);
```

```
figure
plot(w,abs(H)); title('Module');xlabel('w');axis tight

figure
plot(w,angle(H)); title('Angle');xlabel('w');axis tight
```

g) ¿Es invertible el filtro? Justifica la respuesta.

No, el sistema no es invertible porqué el filtro inverso presenta tres polos a -1 (un polo triple en -1) que lo hacen inestable.



4) De un filtro únicamente conocemos las siguientes características:

Parámetro de ganancia $G = 1$

Polos en: $p_1 = 0.8\, e^{j\frac{\pi}{8}},\ p_2 = 1$

Zero en: $z_1 = 0.9\, e^{j\frac{\pi}{6}}$

Se pide:

a) Determina los polos/ceros que necesariamente faltan para conseguir el filtro de menor orden posible con todos sus coeficientes reales. ¿Cuál es el orden de este filtro?
b) Determine su función de transferencia.
c) Dibuje su diagrama completo de polos y ceros.
d) Determine analíticamente la respuesta al impulso si sabemos que:

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{1-pz^{-1}}\right] = Z^{-1}\left[\frac{z}{z-p}\right] = p^n u(n)$$

e) Utilizando el Matlab proporcione la representación del módulo y la fase de la respuesta en frecuencia del filtro.
f) Razone claramente si el filtro es causal, estable y en caso de serlo proporcione su ROC.
g) Razone si se trata de un sistema de fase mínima y, sólo en el caso de ser invertible, proporcione el filtro inverso.

Solución

De un filtro únicamente conocemos las siguientes características:

Parámetro de ganancia $G = 1$

Polos en: $p_1 = 0.8\, e^{j\frac{\pi}{8}},\ p_2 = 1$

Zero en: $z_1 = 0.9\, e^{j\frac{\pi}{6}}$

Se pide:

h) Determina los polos/ceros que necesariamente faltan para conseguir el filtro de menor orden posible con todos sus coeficientes reales. ¿Cuál es el orden de este filtro?

Cuando los filtros tienen todos sus coeficientes reales sus polos y ceros complejos aparecen en pares complejos conjugados. Eso implica que falta un polo en: $p_1 = 0.8\, e^{-j\frac{\pi}{8}}$ y un cero en $z_1 = 0.9\, e^{-j\frac{\pi}{6}}$. El filtro será de tercer orden.

i) Determine su función de transferencia.

$$H(z) = \frac{\left(1-0.9\, e^{j\frac{\pi}{6}}\, z^{-1}\right)\left(1-0.9\, e^{-j\frac{\pi}{6}}\, z^{-1}\right)}{\left(1-0.8\, e^{j\frac{\pi}{8}}\, z^{-1}\right)\left(1-0.8\, e^{-j\frac{\pi}{8}}\, z^{-1}\right)(1-\ z^{-1})} = \cdots$$

$$= \frac{1-0.9\left[e^{j\frac{\pi}{6}}+e^{-j\frac{\pi}{6}}\right]z^{-1}+0.81z^{-2}}{\left(1-0.8\left[e^{j\frac{\pi}{8}}+e^{-j\frac{\pi}{8}}\right]z^{-1}+0.64z^{-2}\right)(1-\ z^{-1})}$$

$$= \frac{1 - 1.8\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z^{-1} + 0.81z^{-2}}{\left(1 - 1.6\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)z^{-1} + 0.64z^{-2}\right)(1 - z^{-1})}$$

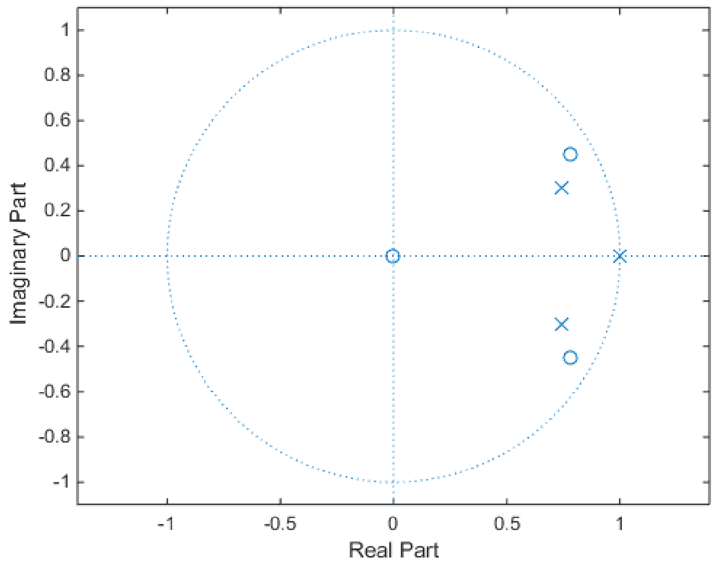
$$= \frac{1 - 1.8\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z^{-1} + 0.81z^{-2}}{1 - \left(1 + 1.6\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)z^{-1} + \left(0.64 + 1.6\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)z^{-2} - 0.64z^{-3}}$$

$$= \frac{1 - 1.56z^{-1} + 0.81z^{-2}}{1 - 2.48z^{-1} + 2.12z^{-2} - 0.64z^{-3}}$$

j) Dibuje su diagrama completo de polos y ceros.

$$H(z) = \frac{1 - 1.56z^{-1} + 0.81z^{-2}}{1 - 2.48z^{-1} + 2.12z^{-2} - 0.64z^{-3}}$$

$$= \frac{z^3 - 1.56z^2 + 0.81z}{z^3 - 2.48z^2 + 2.12z - 0.64}$$



k) Determine analíticamente la respuesta al impulso si sabemos que:

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{1 - pz^{-1}}\right] = Z^{-1}\left[\frac{z}{z - p}\right] = p^n u(n)$$

$$H(z) = \frac{z^3 - 1.56z^2 + 0.81z}{z^3 - 2.48z^2 + 2.12z - 0.64}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z^2 - 1.56z + 0.81}{z^3 - 2.48z^2 + 2.12z - 0.64} = \frac{1.56}{z - 1} + \frac{0.47e^{j2.22}}{z - 0.8e^{j\frac{\pi}{8}}} + \frac{0.47e^{-j2.22}}{z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{8}}}$$

$$H(z) = \frac{1.56z}{z - 1} + \frac{0.47e^{j2.22}z}{z - 0.8e^{j\frac{\pi}{8}}} + \frac{0.47e^{-j2.22}z}{z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{8}}}$$

Aplicando la transformada Z inversa.

$$h(n) = 1.56u(n) + 0.47e^{j2.22}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{8}n}u(n) + 0.47e^{-j2.22}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{8}n}u(n)$$

Arreglando la expresión:

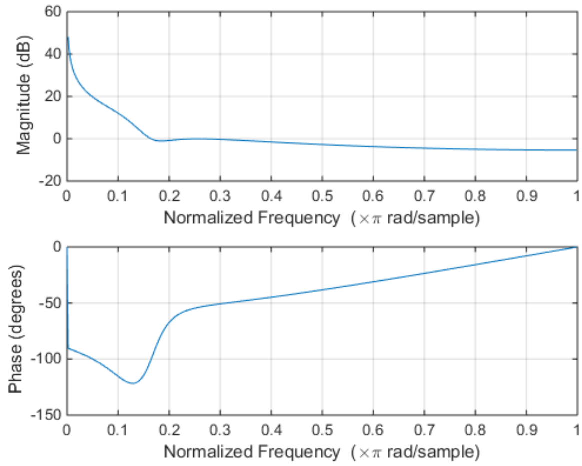
$$h(n) = 1.56u(n) + 0.47(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{8}n+j2.22}u(n) + 0.47(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{8}n-j2.22}u(n)$$

$$h(n) = 1.56u(n) + 0.94(0.8)^n cos\left(\frac{\pi}{8}n + 2.22\right)u(n)$$

l) Utilizando el Matlab proporcione la representación del módulo y la fase de la respuesta en frecuencia del filtro.

$$H(z) = \frac{1 - 1.56z^{-1} + 0.81z^{-2}}{1 - 2.48z^{-1} + 2.12z^{-2} - 0.64z^{-3}}$$

freqz([1 -1.56 0.81],[1 -2.48 2.12 -0.64])



m) Razone claramente si el filtro es causal, estable y en caso de serlo proporcione su ROC.

Del apartado e se ve que el filtro no es de fase lineal (sólo los filtros FIR pueden conseguirla).
El filtro es causal porqué la salida sólo depende de valores pasados y presentes de la entrada.
Es críticamente estable porqué tiene todos los polos dentro del circulo de radio unidad salvo un polo en z=1 en el círculo unidad.
La R.O.C es la región |z| > 1

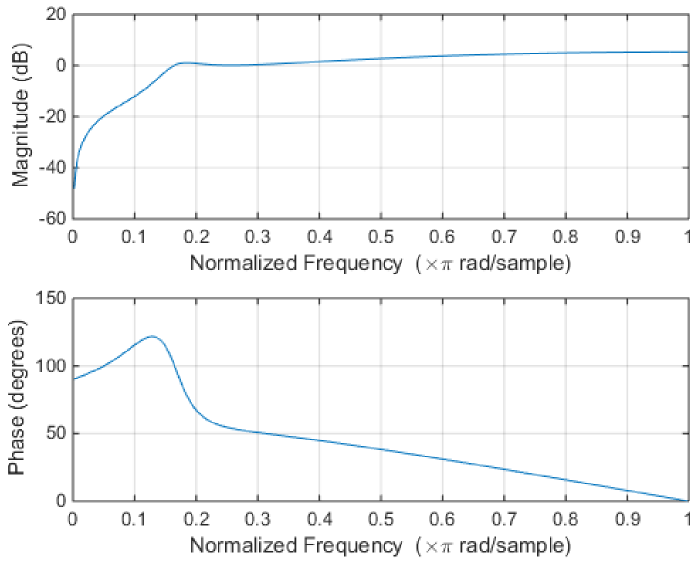
n) Razone si se trata de un sistema de fase mínima y, sólo en el caso de ser invertible, proporcione el filtro inverso.

Es un sistema de fase mínima porqué tiene todos los ceros dentro del circulo unidad y entonces el filtro es invertible, manteniendo su estabilidad.

La función de transferencia del sistema inverso será:

$$H_{inv}(z) = \frac{1 - 2.48z^{-1} + 2.12z^{-2} - 0.64z^{-3}}{1 - 1.56z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

Su representación en frecuencia: freqz([1 -2.48 2.12 -0.64],[1 -1.56 0.81])



Si representan las amplitudes de H(z) i H_{inv}(z) simultáneamente se tendrá: